



TITLE:

パラ超関数:シュヴァルツ超関数の積をふくむ新しい超関数概念について(変分問題・非線型楕円型方程式の諸問題)

AUTHOR(S):

半沢, 英一

---

CITATION:

半沢, 英一. パラ超関数:シュヴァルツ超関数の積をふくむ新しい超関数概念について(変分問題・非線型楕円型方程式の諸問題). 数理解析研究所講究録 1993, 834: 104-114

ISSUE DATE:

1993-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83425>

RIGHT:

## パラ超関数

— シュガ, ルツ超関数の様をふくむ

新しい超関数概念について —

金沢大学教養部 半沢英一 (Ei-Ichi Hanzawa)

P. Dirac が量子力学の定式化のために彼のいわゆるデルタ関数を導き出したのは 1926 年の事である。ここに人類は古典的関数概念の枠を越えた関数概念の存在と有効性を、またその不可避性を感知したといえるだろう。そしてその様な存在を数学的に把握する最初の試みは L. Schwartz によってもなされた。彼のいわゆる超関数 (distribution)  $\mathcal{D}'$  とは

- (1) 古典的関数をふくむ線型空間であり、
- (2) 微分が自由にでき、
- (3) 局所決定性となごみあせの原理をみたす。

という点でまさに“超”関数の名に値するものであった。なお (1) と (2) よりデルタ関数が一超関数となる事や、シュガ, ルツの超関数  $\mathcal{D}'$  が (1) ~ (3) をみたす最小のクラスである事はよく

知られている。

さて (1) ~ (3) をみたす体系をおかれかれは“超関数”と呼んでさしつかえなかりであろう。そして  $\mathcal{D}'$  は最小の超関数クラスではあるが決して唯一のものではなから。た。その事は高名な佐藤の超関数 (hyperfunction)  $\mathcal{B}$  を想起するだけでわかる。

ところで物理を記述する事を契機として生まれた超関数論ではあ、たが  $\mathcal{D}'$  や  $\mathcal{B}$  にはその点に関して一つの不満があ、た。それは場の量子論にはしばしば超関数同士の積があ、た (例えばデルタ関数の二乗) 超関数内での乗法がいろいろ行われる事が期待されるのにあ、たが  $\mathcal{D}'$  ではその中の  $C^\infty$  関数との積、 $\mathcal{B}$  では  $C^\infty$  関数との積しか一般には定義されな、た。デルタ関数の二乗などにつ、たは  $\mathcal{D}'$  や  $\mathcal{B}$  では全くとりあ、たかえな、た。

こうした状況の中、1983年に興味深い仕事が発表された。J. F. Colombeau が  $\mathcal{D}'$  をふくみ、それ自身 commutative algebra をな、た新しい超関数概念を発表したのであ、た。Colombeau の超関数 (new generalized function) は  $\mathcal{G}$  とあ、た。

当然  $\mathcal{G}$  は  $\delta$  関数の二乗などをふくみ非常に都合のよ、た体系の様に思あ、た。しかし  $\mathcal{D}'$  の乗法ではよく知られてい、たように、

$$x \delta(x) = 0, \quad x (\text{V. p. } \frac{1}{x}) = 1$$

をみたし

$$((\text{V. p. } \frac{1}{x}) x) \delta(x) = \delta(x) \neq 0 = (\text{V. p. } \frac{1}{x})(x \delta(x))$$

で結合律はみたされたり。したが、この Colombeau の超関数における乗法とは  $\mathcal{D}'$  の乗法とは大幅に異なるものである事が予想され、実際に積の二つの因子が  $C^\infty$  である時とが一方の因子が 0 である時以外は  $\mathcal{D}'$  の、あるいは古典的な積とは一致しないのである。例えば  $x$  と  $|x|$  の積は (通常の)  $x|x|$  ではなく、 $x$  と  $\delta(x)$  の積は 0 にならな。特に後者などはデルタ関数が  $x$  の掛け算の固有関数にならな事を意味し、Dirac のもとの意図とはかけはなれてしまう。

このように見てくると Colombeau の超関数が物理に有効であるかについては懐疑的にならざるをえな。有効であるためには数値や多くの関数との具体的な結びつきが必要なのに Colombeau の理論ではそれが欠けている様に思える。だからここで定義されてるデルタ関数の二乗についても、数理の世界にデルタ関数の二乗が自然に存在するとして、それをとらえていけるか疑問である。

この様に筆者は Colombeau 超関数の物理数学上の有効性にはかなりの疑問をいだいてゐるが、それがシュワルツ超関数を拡大する位方は佐藤超関数の方向以外にもある事を示した事は大きいと思う。それを契機に筆者はシュワルツ超関数を、その積を自然にふくむ形で拡大するにはどうすればよいかと考えはじめ、パラ超関数 (paradistribution) と名づけた体系  $\mathcal{P}$  をえた。ここに  $\mathcal{P}$  は (a)~(c) の性質をみたし、 $\mathcal{D}'$  を部分空間としてふくみ、 $\mathcal{D}'$  の乗法

$$C^\infty \times \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$$

は

$$\mathcal{D}' \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

の乗法へと自然に拡大されるのである。こうして  $\mathcal{P}$  体の乗法はえられなりが少くとも  $\mathcal{D}'$  をかけていく事はいくらでもでき、乗法の範囲は充分広がった事になる。のみならず

$$\left( \text{v.p.} \frac{1}{x} \right) \delta(x) = -\frac{1}{2} \delta'(x),$$

$$S(x)^2 - \frac{1}{\pi^2} (\text{v.p.} \frac{1}{x})^2 = -\frac{1}{\pi^2} \text{Pt.} \frac{1}{x^2}$$

とり、左式も成立し、ここではデルタ関数の二乗なども具体的数式を伴う数学世界の中にある形をとらえられているのである。

本稿では  $\mathcal{F}$  の構成と  $\mathcal{D}'$  とのかけ算がいかに関係するかという事を略述しよう。

まず  $\mathcal{F}$  の構成であるが基本となるのは “type” という概念と “reduction” という概念である事を断っておく。

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  の領域とする。  $\varphi$  が  $\Omega$  上の type indicator であるとは、  $\varphi$  が  $\Omega$  上の  $N$  への上半連続関数である事をいう。今、

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{D}^\infty = \{(\varphi, \varphi_1, \dots); \varphi_i \in \mathcal{D}\}$$

とする。  $f$  が  $\Omega$  上のパラ関数 (parafunctional) であるとは

$$f: \Omega \times \mathcal{D}^\infty \rightarrow \mathbb{C}$$

で、  $x$  を  $a \in \Omega$  の近傍を動くとし、  $\text{supp } \varphi_i$  が一様にある原点中心の小さい球にあるとする時、

(1)  $x \longmapsto f(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots)$  は  $C^\infty$  である。

(2)  $f(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots) = f(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\nu(x)})$   
 である。

をみたす事である。なおここには  $(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$  等を  
 $(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots)$  といふ書き方をしている。

上記パラメ関数に次のような *reduction* による同値関係をい  
 へてパラメ関数はつくられる。今、

$$f(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \downarrow g(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})$$

であるとは、

$$\int \varphi_N(\xi) d\xi = 1$$

なる  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \in \text{fix } L$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  に対し

$$\varphi_{N, \varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi_N\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$$

とした時、

$$f(x| \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \varphi_N, \varepsilon) \rightarrow g(x| \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$$

$$\text{in } C^\infty(\Omega), \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0$$

である事とする。また  $M < N$  と

$$f(x| \varphi_1, \dots, \varphi_M) \Downarrow\Downarrow g(x| \varphi_1, \dots, \varphi_M)$$

であるとは、パラ関数の有限列  $k_1, k_2, \dots, k_L$  が存在して

$$f \downarrow k_1, k_1 \downarrow k_2, \dots, k_{L-1} \downarrow k_L, k_L \downarrow g$$

となる事をいう。  $f \equiv g$  とは、任意の  $\Omega' \subset \subset \Omega$  に対して

$$(f-g)|_{\Omega'} \Downarrow\Downarrow 0$$

である事をいう。この  $\equiv$  は、微分・線型演算と整合性のある事が確認できる。先にいった様に

$$\mathcal{F}(\Omega) = \Omega \text{ 上のパラ関数 } / \equiv$$



として  $\Omega$  上のパラ超関数が定義されるわけである。パラ汎関数  $f$  を代表元とするパラ超関数を  $[f]$  と書く。

今,  $T \in \mathcal{D}'$  に対し

$$f_T(x| \varphi_1) = T_x(\varphi_1(x-x))$$

とおく。  $T_x$  とは  $T$  を変数の関数の汎関数とみなすことを示すとする。この時,

$$T \longmapsto [f_T(x| \varphi_1)]$$

は  $\mathcal{D}'$  の  $\mathcal{D}$  への微分も保存する線型単射となる。パラ超関数の理論では, このように  $[f_T]$  を  $T$  とみなすのである。デルタ関数は

$$[f_\delta(x| \varphi_1)] = [\varphi_1(-x)]$$

と表現されている。

さて問題の乗法を論じよう。パラ汎関数

$$f_1(x_1| \varphi_1, \varphi_2, \dots) \quad \text{と} \quad f_2(x_2| \varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

の積を

$$f_1 f_2 (x | \varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

$$= \int f_1(\xi | \varphi_2, \varphi_3, \dots) f_2(\xi | \varphi_1, \varphi_3, \dots) \varphi_1(\xi - x) d\xi$$

で定義する。  $f_1, f_2$  の  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  の index が shift されてゐる事に注意されたい。

さて上記の積と同値関係  $\equiv$  は一般には整合性はない。しかし一方が  $\mathcal{L}'$  の元である時は整合性をもつ。つまり

$$f_{T_1} \equiv f_{T_2}, f_1 \equiv f_2 \quad \text{ならば} \quad f_{T_1} f_1 \equiv f_{T_2}$$

が成立する。この事を示そう。

$$f_{T_1} \equiv f_{T_2} \Leftrightarrow T_1 = T_2$$

であるから

$$f \equiv 0 \quad \text{ならば} \quad f_T f \equiv 0$$

をよせよ。パラ超関数の局所決定性と超関数の局所構造定理から、ある  $g \in C^\infty(\Omega)$  がとれて

$$\begin{aligned} f_T(\xi | \varphi_1) &= \int_{\eta \in \Omega} g(\eta) (-1)^{|\alpha|} \partial_\eta^\alpha (\varphi_1(\eta - \xi)) d\eta \\ &= \int_{\eta \in \Omega} g(\eta) \partial_\xi^\alpha (\varphi_1(\eta - \xi)) d\eta \end{aligned}$$

とできる。したがって

$$\begin{aligned} f_T f(x | \varphi_1, \varphi_2, \dots) &= \int \left( \int g(\eta) \partial_\xi^\alpha (\varphi_2(\eta - \xi)) d\eta \right) f(\xi | \varphi_2, \dots) \varphi_1(\xi - x) d\xi \\ &= \int \left( \int g(\eta) \varphi_2(\eta - \xi) d\eta \right) (-1)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha (f(\xi | \varphi_2, \dots) \varphi_1(\xi - x)) d\xi \end{aligned}$$

とかける。今  $f \equiv 0$  とパラ超関数の局所決定性より、

$$f = f_0 \downarrow f_1, f_1 \downarrow f_2, \dots, \downarrow f_2 = 0$$

となるパラメ関数の列がとれるとしてよい。  $f_n \downarrow f_{n+1}$  で  $f_n$  の type が 1 以上 (積分の中で shift された時は 2 以上となる) の時

$$f_T f_n \downarrow f_T f_{n+1}$$

は問題なくいえる。 type が 1 の時  $\int \varphi_2 = 1$  として

$$\int g(\eta) \varphi_{2,\varepsilon}(\eta - \xi) d\eta \rightarrow g(\xi)$$

$$\text{in } C^0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

だからこの場合も同様の事がいえて、乗法と同値関係の整分性がいえる。こうしてみるとこの理論での *reduction* という概念が Schwartz の超関数の実体と不思議にうまく通み合、ている様子もわかるだろう。また自然な性質や等式が成立する事は前述のとおりである。

なお本稿の内容を詳しく知りたい方は次の論文を見られたい。

E. Hanyawa 'A Generalization of the idea of distributions',  
JJIAM, Vol. 9, pp. 471-485, October 1992